扬州市 2021 届高三考前调研测试试题

数学参考答案　　2021.05

1.C　2.B　3.A　4.D　5.B　6.D　7.A　8.B

9. ACD　10. BD　11. AB　12. ACD

13.60　14.3　15. 3.6　16.121

17．解析：（1）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，等比数列$\{b_n\}$的公比为q

因为a_2-1,a_3,a_6-1是等比数列$\{b_n\}$的连续三项

所以${a_3}^2=(a_2-1)(a_6-1)$，即$(2+2d)^2=(2+d-1)(2+5d-1)$，解得$d=3$或$d=-1$

因为$\{b_n\}$是等比数列，其各项不能为零 ，所以$d=-1$舍去，所以$d=3$，

所以$a_n=2+3(n-1)=3n-1$　　………3 分

又 $q=\dfrac{a_3}{a_2-1}=2$ ，所以$b_n=2\times 2^{n-1}=2^n$.　　…………6 分

（2）$\because c_n=(-1)^n\log_2(b_nb_{n+1})+\log_2 a_n=(-1)^n\log_2(3n-1)(3n+2)+n=n+(-1)^n[\log_2(3n-1)+\log_2(3n+2)]$，

$\therefore\{c_n\}$的前 10 项和$T_{10}=(1+2+\cdots+10)+(-\log_2 2-\log_2 5)+(\log_2 5+\log_2 8)+(-\log_2 8-\log_2 11)+\cdots$

$+(-\log_2 26-\log_2 29)+(\log_2 29+\log_2 32)=\dfrac{10(1+10)}{2}-\log_2 2+\log_2 32=59$.　　……………10 分

18. 解析：（1）不能同时满足③④，理由如下：

由条件③得$2\sin C\cos A=\sin A\cos B+\sin B\cos A$，即$2\sin C\cos A=\sin C$，即$\cos A=\dfrac{1}{2}$，

因为$A\in(0,\pi)$，所以$A=\dfrac{\pi}{3}$；　　……………2 分

由条件④得$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}ac\times\dfrac{1}{2ac}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，　　……………4 分

因为$\cos B=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<-\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{2\pi}{3}$， $B\in(0,\pi)$，而$y=\cos x$在$(0,\pi)$单调递减，所以$\dfrac{2\pi}{3}<B<\pi$.

于是$A+B>\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2\pi}{3}=\pi$，与$A+B<\pi$矛盾. 所以$\Delta ABC$不能同时满足③④.　　……………6 分

（2）满足三角形有解的所有组合为①②③或①②④.

若选择组合①②③：由$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$得$\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2}{\sin B}$，即$\sin B=1$，

因为$B\in(0,\pi)$，所以$B=\dfrac{\pi}{2}$，　　………9 分

ΔABC为直角三角形，所以$c=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$，所以$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.　　………12 分

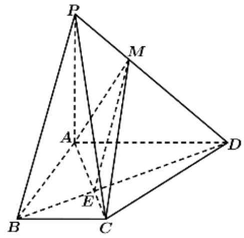
若选择组合①②④：由$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$得$c^2+2c=1$，解得$c=\sqrt{2}-1$， ……………9 分

因为$B\in(0,\pi)$，所以$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times(\sqrt{2}-1)\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. ……………12 分

19．(1) 证明 连接 ME， ∵PB//平面 MAC，PB⊂平面 PBD，平面 PBD⋂平面 MAC=ME，

∴PB//ME，$\frac{DE}{BE}=\frac{DM}{PM}=\frac{AD}{BC}=2$，∴BC=1， ……………2 分



而 AB=2，$AC=\sqrt{3}$，$\therefore AC^2+BC^2=AB^2$，∴CA⊥BC，即 CA⊥AD，

又 PA⊥平面 ABCD，CA⊂平面 ABCD，∴PA⊥CA，

又 PA⋂AD=A，PA⊂平面 PAD，AD⊂平面 PAD，

∴CA⊥平面 PAD. ……………5 分

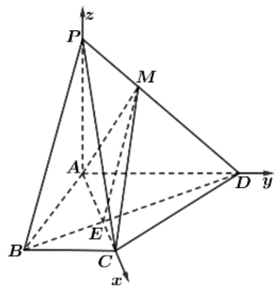
(2) 因为PB与平面$ABCD$所成的角为45°，所以$\angle PBA=45^\circ$，即$PA=2$

方法 1：向量法

如图，以A为原点，射线AC，AD，AP分别为x，y，z轴非负半轴建立空间直角坐标系，

则$A(0,0,0),C(\sqrt{3},0,0),D(0,2,0),P(0,0,2),$所以$\overrightarrow{PC}=(\sqrt{3},0,-2),\overrightarrow{PD}=(0,2,-2),$

设平面PCD的法向量为$\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，



则$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PD}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}\sqrt{3}x-2z=0\\ 2y-2z=0\end{cases}$，

所以平面PCD的一个法向量为$\overrightarrow{n_1}=(2,\sqrt{3},\sqrt{3})$ ，……………8 分

又平面PAD的一个法向量为$\overrightarrow{n_2}=(1,0,0)$， ……………10 分

所以$\cos\left\langle\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

所以二面角$C-PD-A$的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$ ……………12 分

方法 2：综合法 提示，在ΔPAD内作$AH\perp PD$于H，则$\angle CHA$即为所求角

20、解析：（Ⅰ）因为$|ON|=1$，又ON是三角形MF_1F_2的中位线，所以$|MF_2|=2$，$MF_1\perp MF_2$，

由椭圆的定义可知$|MF_1|=2a-2$，因为三角形MF_1F_2的面积为$S=\frac{1}{2}(2a-2)\times2=2a-2=2$，所以$a=2$，

又因为$|F_1F_2|=\sqrt{|MF_1|^2+|MF_2|^2}=2\sqrt{2}$，所以$c=\sqrt{2}$，则$b=\sqrt{2}$，

所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ ……………4 分

（2）存在

①当直线 AB 的斜率不存在时，直线 AB 的方程为 $x=-\sqrt{2}$，此时椭圆上不存在符合题意的点 P；……5 分

②当直线 AB 的斜率存在且 $k=0$ 时，此时 O,A,B 三点共线，所以椭圆上不存在符合题意的点 P；

③当直线 AB 的斜率存在且不为 0 时，设点 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，$P\left(x_0,y_0\right)$，

设直线 AB 的方程为 $y=k\left(x+\sqrt{2}\right)$.

联立 $\begin{cases} y=k(x+\sqrt{2}) \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$，消去 y 可得 $\left(2k^2+1\right)x^2+4\sqrt{2}k^2x+4k^2-4=0$，$\Delta=16k^2+16>0$，

所以 $x_1+x_2=-\dfrac{4\sqrt{2}k^2}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2-4}{2k^2+1}$ ……………7 分

所以 $y_1+y_2=k\left(x_1+x_2+2\sqrt{2}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}k}{2k^2+1}$

因为四边形 $OAPB$ 是平行四边形，所以 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\left(x_1+x_2,y_1+y_2\right)=\left(-\dfrac{4\sqrt{2}k^2}{2k^2+1},\dfrac{2\sqrt{2}k}{2k^2+1}\right)$.

所以点 $P\left(-\dfrac{4\sqrt{2}k^2}{2k^2+1},\dfrac{2\sqrt{2}k}{2k^2+1}\right)$. ……………9 分

又点 P 在椭圆上，则有 $\left(-\dfrac{4\sqrt{2}k^2}{2k^2+1}\right)^2+2\left(\dfrac{2\sqrt{2}k}{2k^2+1}\right)^2=4$，即 $4k^4=1$，解得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

所以椭圆上存在三个点 A,B,P，满足要求，此时直线 AB 的方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+1$. ……………12 分

21. 解（1）设甲校以 3:1 获胜为事件 B，4 局比赛中甲校胜出分别为 $A_i\left(i=1,2,3,4\right)$ …………1 分

则 $P\left(B\right)=P\left(A_1A_2\overline{A_3}A_4+\overline{A_1}A_2A_3A_4+A_1\overline{A_2}A_3A_4\right)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)+C_2^1\left(\dfrac{1}{3}\right)\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{12}{81}=\dfrac{4}{27}$

答：甲校以 3:1 获胜的概率为 $\dfrac{4}{27}$ ……4 分

（2）ξ 的可能取值为 1、2、3

$P\left(\xi=1\right)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\cdot\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{6}{27}=\dfrac{2}{9}$； ……6 分

$P\left(\xi=2\right)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)+C_2^1\left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)+C_2^1\left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{30}{81}=\dfrac{10}{27}$ ……9 分

$P\left(\xi=3\right)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)+C_2^1\left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)C_2^1\left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)$

$+C_2^1\left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)C_2^1\left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{99}{243}=\dfrac{11}{27}$

所以，随机变量ξ的概率分布列为：

ξ	1	2	3
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{11}{27}$

……12 分

22．解析：（1）函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为$\left(0,+\infty\right)$， $f'\left(x\right)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$，

当$a\le 0$时， $f'\left(x\right)>0$，故 $f\left(x\right)$ 在$\left(0,+\infty\right)$上递增，所以 $f\left(x\right)$ 无极值；

当$a>0$时， $f\left(x\right)$ 在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上单调递增；在当$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递减.

所以 $f\left(x\right)$ 在 $x=\frac{1}{a}$ 处取得极大值，无极小值.

综上所述，若 $f\left(x\right)$ 存在极值，则a的取值范围为$\left(0,+\infty\right)$. ……………4 分

(2) $g(x)=f(x)+2\sin x=\ln x-x+2\sin x$，下面分区间逐段研究

①当$x\in\left[\pi,2\pi\right)$时， $\sin x\le 0$，

由（1）知$a=1$时 $f\left(x\right)=\ln x-x$，此时 $f\left(x\right)=\ln x-x\le f\left(1\right)$，即$\ln x-x\le -1$，

所以$g\left(x\right)<0$，所以$g\left(x\right)$在$\left[\pi,2\pi\right)$上没有零点. ……………6 分

②当$x\in\left[2\pi,+\infty\right)$时， $g\left(x\right)\le \ln x-x+2$

设$\varphi\left(x\right)=\ln x-x+2$， $\varphi'\left(x\right)=\frac{1}{x}-1<0$，所以$\varphi\left(x\right)$在$\left[2\pi,+\infty\right)$上单调递减，所以$\varphi\left(x\right)\le\varphi\left(2\pi\right)<0$

所以当$x\in\left[2\pi,+\infty\right)$时， $g\left(x\right)\le\varphi\left(x\right)\le\varphi\left(2\pi\right)<0$恒成立，所以$g\left(x\right)$在$\left[2\pi,+\infty\right)$上没有零点. ………8 分

③当$x\in\left(0,\pi\right)$时， $g'\left(x\right)=\frac{1}{x}-1+2\cos x$， $g''\left(x\right)=-2\sin x-\frac{1}{x^2}<0$，所以$g'\left(x\right)$在$\left(0,\pi\right)$上单调递减，

又因为$g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{\pi}-1+1>0$， $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}-1<0$，所以$g'\left(x\right)$在$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$上有唯一的零点$\alpha$.

$g\left(x\right)$在$\left(0,\alpha\right)$上单调递增; $g\left(x\right)$在$\left(\alpha,\pi\right)$上单调递减;

所以$g\left(x\right)$在$\left(0,\pi\right)$上存在唯一的极大值点$\alpha\left(\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$，且$g\left(\alpha\right)>g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+2>2-\frac{\pi}{2}>0$

又因为$g\left(\frac{1}{e^2}\right)=-2-\frac{1}{e^2}+2\sin\frac{1}{e^2}<-2-\frac{1}{e^2}+2<0$，所以$g\left(x\right)$在$\left(0,\alpha\right)$上恰有一个零点.

又因为$g\left(\pi\right)=\ln\pi-\pi<2-\pi<0$，所以$g\left(x\right)$在$\left(\alpha,\pi\right)$上也恰有一个零点.

综上得， $g\left(x\right)$有且仅有两个零点. ……………12 分